Computer-Graphik I
Baryzentrische Koordinaten

G. Zachmann
Clausthal University, Germany
zach@in.tu-clausthal.de

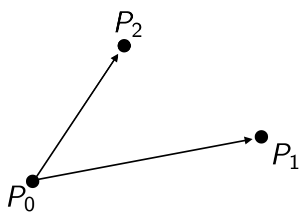
- Def.: affin unabhängig

  Geg.: k+1 Punkte $P_i \in \mathbb{R}^n,\ 0 \leq i \leq k,\ k \leq n$. Seien dadurch

  k Vektoren v_i definiert: $v_i := P_i - P_0\ ,\quad i = 1, \ldots, k$

  Die Punkte P_i heißen affin unabhängig $\Leftrightarrow$
  die Vektoren v_i linear unabhängig sind.

- Beispiel:



Baryzentrische Koordinaten

- Def.: affines Koordinatensystem

  Wenn $k+1$ Punkte $P_0, \ldots, P_k \in \mathbb{R}^n$, $n \geq k$ affin unabhängig sind, so definieren sie ein affines Koordinatensystem.

- Def.: affine Kombination, baryzentrische Koordinaten

  Seien $k+1$ affin unabhängige Punkte $P_0, \ldots P_k \in \mathbb{R}^n$, $k \leq n$ gegeben. Daraus kann man weitere Punkte definieren mittels einer affinen Kombination:

$$P = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i P_i, \quad \text{mit} \quad \sum_{i=0}^{k} \lambda_i = 1, \ \lambda_i \in \mathbb{R}$$

  Die λ_i heißen baryzentrische Koordinaten von P bzgl. des Koordinatensystems $[P_0, P_1, \ldots, P_k]$.

- Satz (o. Bew.):

  Die Punkte $P_0, \ldots P_k \in \mathbb{R}^n$, $k \leq n$ sind affin unabhängig $\Leftrightarrow$ jede affine Kombination bzgl. dieser Punkte ist eindeutig, d.h.

$$\forall s_i, t_i \in \mathbb{R} \text{ mit } \sum s_i = \sum t_i = 1 :$$

$$\sum s_i P_i = \sum t_i P_i \ \Leftrightarrow \ \forall i = 0, \ldots, k : \ s_i = t_i$$

Erinnerung: affine Abbildungen

- Affine Abbildungen := {lineare Abbildungen + Translationen}
- Affine Abbildung := Abbildung, die affine Kombinationen invariant lassen, d.h.

$$P = \sum \lambda_i P_i \;\Leftrightarrow\; \phi(P) = \phi\left(\sum \lambda_i P_i\right) = \sum \lambda_i \, \phi(P)$$

- M.a.W.: eine affine Abbildung ist eindeutig durch die Bilder der affinen Basis festgelegt.

Kleiner Exkurs: die konvexe Hülle

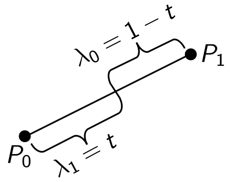
- Definition: konvexe Hülle

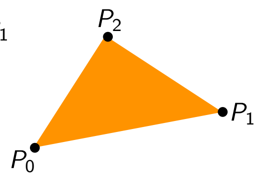
  Seien $P_0, \ldots, P_k$ affin unabhängige Punkte.
  Dann ist die konvexe Hülle dieser Punkte definiert als:

$$\mathrm{CH}(P_0, \ldots, P_k) := \left\{ P \mid P = \sum \lambda_i P_i, \; \sum \lambda_i = 1, \; \forall i : \lambda_i \geq 0 \right\}$$

  In diesem Fall gilt $\forall i : \; 0 \leq \lambda_i \leq 1$.
  Eine solche Summe heißt auch konvexe Kombination.

- Beispiele:
  - $P_0, P_1 \longrightarrow$ Strecke
  - $P_0, P_1, P_2 \longrightarrow$ Dreieck





Physikalische Interpretation

- Gegeben $k+1$ Punkte $P_0, \ldots, P_k \in \mathbb{R}^n$ mit den Massen $m_i, \sum m_i \neq 0$
- Definiere die „normierten Massen“ $\lambda_i = \dfrac{m_i}{\sum m_i}$
- Dann ist der Punkt $P = \sum \lambda_i P_i$ genau der Schwerpunkt der $k+1$ Punkte